EXAMEN FINAL DE METODOS NUMERICOS (MB536)

PARTE I

Responda a las siguientes preguntas

1. **(1 P)** Se desea evaluar la siguiente integral:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x^3 + e^{\pi} x^2 + \sqrt{2}\, x + 1\, dx$$

Determine el error si aplica la siguiente cuadratura de Simpson abierta con 2 parábolas: $\int_{x_0}^{x_4} f(x)\, dx \approx \frac{4h}{3}\left(2f(x_1) - f(x_2) + 2f(x_3)\right)$

---

2. **(1 P)** Se desea determinar el polinomio interpolante que pase por los puntos **(1 ; 5) y (2 ; m),** al aplicar Lagrange se obtuvo:

$$P_1(x) = \frac{(x-2)}{(1-2)}(a+b) + \frac{(x-1)}{(2-1)}(a-b)$$

Si **P_1(3)=13**, hallar ***a, b*** *y* **m** ***:***

---

3. **(1 P)** Demuestre si es convergente el método del punto fijo del siguiente sistema no lineal:

$$x = \left(\frac{3y^2 + 42}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \quad ; \quad y = \left(\frac{-5x^2 + 69}{3}\right)^{\frac{1}{3}}$$

Tome como punto inicial $\begin{bmatrix} x_0 = 1 \\ y_0 = 1 \end{bmatrix}$

¿Converge?

Si ☐ No ☐

No realice iteraciones.

Justifique su respuesta:

---

4. **(1 P)** Sea el problema de valor frontera:

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{dy}{dx}=-10, \quad y(1)=1\,, \quad \frac{dy}{dx}(x=3)=-1.2$$

Aplicando el método de las diferencias finitas con frontera variable, determine α, β, ρ, τ.

$$\begin{bmatrix} -2 & 7/6 & 0 & 0 \\ 7/8 & -2 & 9/8 & 0 \\ 0 & \alpha & -2 & \rho \\ 0 & 0 & \beta & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -10/3 \\ -5/2 \\ -5/2 \\ \tau \end{bmatrix}$$

---

5. **(1 P)** Las siguientes son medidas del coeficiente de velocidad, k , para la reacción $CH_4 + O \rightarrow CH_3 + OH$ a diferentes temperaturas, T:

T (K)	595	623	761	849	989	1076	1146	1202	1382	1445	1562
$k \times 10^{20}$ (m^3/s)	2.12	3.12	14.4	30.6	80.3	131	186	240	489	604	868

Use el método de mínimos cuadrados para la mejor función de ajuste de:

$$y = ln(k) = c_1 + c_2 * ln(T) - \frac{c_3}{T}$$

Complete el código en Matlab que permita formar la ecuación normal: $A^T Ac = A^T y$, luego obtener los coeficientes de la regresión.

```
T=[595 623 761 849 989 1076 1146 1202 1382 1445 1562];
k= 10^20 *[2.12 3.12 14.4 30.6 80.3 131 186 240 489 604 868];
y=--------------------;
A=[T'.^0 ------------------------------- ];
M=A'*A;
b=-------------------------;
c=vpa(M\b,6)
yaprox=c(1)+-----------------------------;

R2=---------------------------------------; %factor de regresión
Ti=linspace(T(1), T(end));
yi= c(1)+----------------------------------.;
plot(T,y,'rs',Ti,yi,'b.-')
```

6. **(1 P)** Sea:

$$s(x) = \begin{cases} (x-2)^3 + 2(x-2) + 1 & \text{if } x \le 2 \\ -x^3 + 6x^2 - 10x + 5 & \text{if } x \ge 2 \end{cases}$$

¿S(x) es un spline cúbico?

a. Verdadero
b. Falso

Justifique su respuesta:

----

7. **(1 P)** Utilizando propiedades de diferencias numéricas para dos puntos, completar la siguiente tabla:

x	$f(x)$	$f'(x)$
0.5	1.9	
0.6		2.2

----

8. **(1 P)** Utilizando dado el siguiente código de Matlab

```
>>f=@(x)(-x.^3+1)

>>x=[-8:8]

>>ximpar=x(2:2:16);

>>xpar=x(3:2:15);

>>I=(h/3)*(f(x(1))+4*sum(f(ximpar))+2*sum(f(xpar))+f(x(17)))
```

Halle el valor de I.

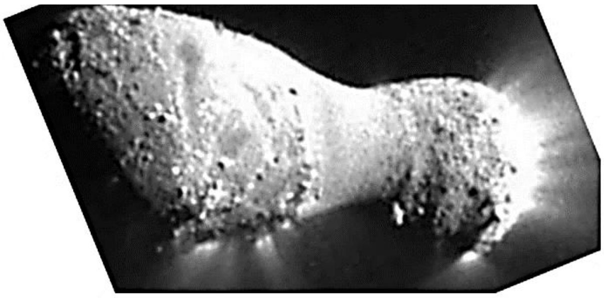
PARTE II

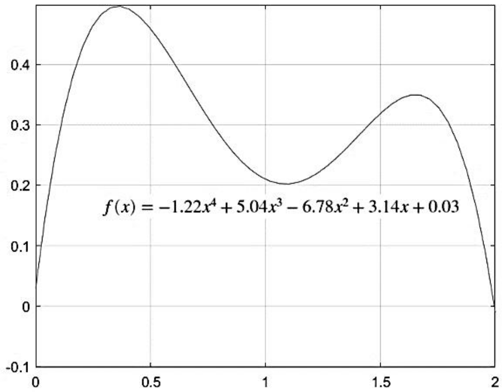
Problema 1

El cometa Hartley 2 se ve en esta espectacular imagen tomada por la nave de la NASA Deep Impact (Impacto Profundo), durante su misión EPOXI, el 4 de noviembre del 2010 mientras volaba cerca del núcleo del cometa a una distancia de 700 kilómetros y a 37 millones de kilómetros de la tierra.

El tamaño del núcleo se estima en 2 km de largo y 0,4 kilómetros de ancho en su ubicación más estrecha.

(Crédito: NASA/JPL-Caltech/UMD).





Según el director del proyecto EPOXI dTim Larsen, del Jet Propulsion Laboratory en Pasadena, California, dijo respecto al núcleo del cometa: "Es algo que parece un cruce entre un juego de bolos y un pepinillo". Investigadores especialistas modelaron que la forma del núcleo del cometa se puede describir por la siguiente función

$$\boldsymbol{f(x) = -1.22x^4 + 5.04x^3 - 6.78x^2 + 3.14x + 0.03}$$

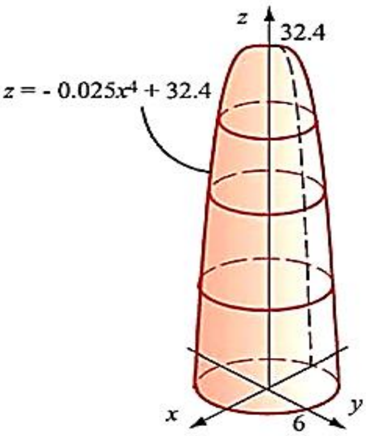
Las unidades están en kilómetros.

a. **(1.5P)** Determine la recta g(x) de mínimos cuadrados que ajuste los siguientes puntos (0;f(0)),(0.5;f(0.5)),(1;f(1)),(1.5;f(1.5)),(2;f(2)). Muestre las ecuaciones normales.
b. **(1P)** Halle la interpolación polinomial lineal para aproximar f(1.5) y el error.
c. **(1.5P)** Considerando la recta g(x), aproxime el volumen total del núcleo del cometa en metros cúbicos. Halle el error relativo porcentual. Asuma que el volumen exacto del núcleo del cometa es 0.49 kilómetros cúbicos.

$$\textbf{Nota: } V_{aprox}(x) = \pi \int_0^2 [g(x)]^2 dx.$$

Problema 2

Una estructura de silo se obtiene girando la curva $\boldsymbol{z = -0.025x^4 + 32.4}$ desde $x = 0$ m a $x = 6$ m sobre el eje z, como se muestra en la figura de la derecha.



El área de la superficie, S, que se obtiene girando una curva $z = f(x)$ en el dominio desde a hasta b alrededor del eje z, se puede calcular mediante:

$$S = 2\pi \int_a^b x\sqrt{1 + [f'(x)]^2}dx$$

Calcule el área de superficie del silo con los siguientes métodos de integración:

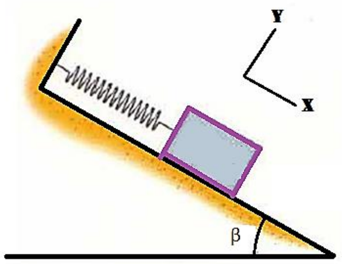
a) **(1P)** Método de Simpson $1/3$. Divide todo el intervalo en cuatro subintervalos.

b) **(1P)** Método de Simpson 3/8. Divide todo el intervalo en seis subintervalos.

c) **(1P)** Método de cuadratura de Gauss de dos puntos en dos tramos [0 3] y de [3 6].

d) **(1P)** ¿Cuál de los métodos tiene mejor aproximación? Justifique usando la estructura de las cuadraturas. S exacto es igual a 966.4613.

Problema 3



En la figura adjunta, el rozamiento (μ=0.1) y un resorte lineal (k=365 N/m) oponen resistencia al movimiento del bloque (W=3580 N). Si se suelta el bloque partiendo del reposo con el resorte indeformado, luego de aplicar la segunda ley de Newton se tiene la siguiente ecuación diferencial:

$$W \, sen \, \beta - \mu \, W \cos \beta - k \, x = W \, x'' / g$$

Considere β=30°, g=9.81 m/s^2

a) **(0.5 P)** Reducir la EDO a un sistema de primer orden.
b) **(1.0 P)** Plantear el algoritmo de Taylor 2 para el sistema EDO de primer orden
c) **(1.5 P)** Aplicar el algoritmo deducido en b) con h=0.5 seg. para determinar durante la primera fase del movimiento hacia abajo del plano inclinado el desplazamiento máximo del bloque a partir de su posición de reposo y el tiempo transcurrido.
d) **(1.0 P)** Determine la velocidad y el tiempo transcurrido cuando el bloque ha recorrido los primeros 4 m desde su posición de reposo.

SOLUCIONARIO EXAMEN FINAL

Parte 1

Pregunta 1

Esta fórmula es exacta para polinomios de grado 3 o menor debido a que la formula de error contiene el termino $f^{iv}(e)$

Error = 0

Pregunta 2

Identificando:

a+b=5

a-b=m

13=-5+2m

a=7

b=-2

m=9

Pregunta 3

Si ☑ No ☐

Justificación

$$G = \begin{pmatrix} \left(\frac{3y^2}{2}+21\right)^{1/3} \\ \left(23-\frac{5x^2}{3}\right)^{1/3} \end{pmatrix} \quad J_G\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{y}{\left(\frac{3y^2}{2}+21\right)^{2/3}} \\ \dfrac{10x}{\left(23-\frac{5x^2}{3}\right)^{2/3}} & 0 \end{pmatrix} \quad L = \|J_G\|_1 \leq L = 0.14 < 1$$

Pregunta 4

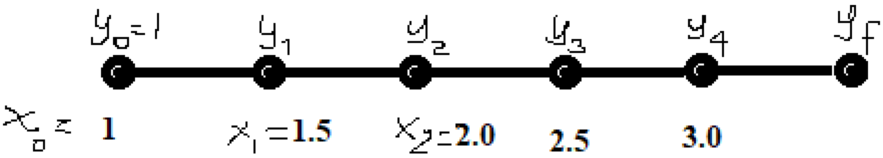
Una frontera variable

$$\frac{d^2y}{\partial x^2} = p(x)\frac{dy}{dx} + q(x)y + r(x)$$

$$\frac{y_{i-1}-2y_i+y_{i+1}}{h^2} = p_i\left(\frac{y_{i+1}-y_{i-1}}{2h}\right) + r_i$$

$$y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1} = \frac{h}{2}p_i(y_{i+1}-y_{i-1}) + h^2 r_i$$

$$\left(1+\frac{hp_i}{2}\right) y_{i-1} - 2y_i + \left(1-\frac{hp_i}{2}\right) y_{i+1} = h^2 r_i$$



$$
\begin{array}{ll}
i=1 & \left(1-\frac{1}{4}\times\frac{2}{3}\right)y_0-2y_1+\left(1+\frac{1}{4}\times\frac{2}{3}\right)y_2=-\frac{10}{4} \\
i=2 & \left(1-\frac{1}{4}\times 2\right)y_1-2y_2+\left(1+\frac{1}{4}\times 2\right)y_3=-\frac{10}{4} \\
i=3 & \left(1-\frac{1}{4}\times\frac{2}{5}\right)y_2-2y_3+\left(1+\frac{1}{4}\times\frac{2}{5}\right)y_4=-\frac{10}{4} \\
i=4 & \left(1-\frac{1}{4}\times 3\right)y_3-2y_4+\left(1+\frac{1}{4}\times 3\right)\underbrace{y_f}_{(-1.2+y_3)}=-\frac{10}{4}
\end{array}
$$

$$
\begin{bmatrix} -2 & 7/6 & 0 & 0 \\ 7/8 & -2 & 9/8 & 0 \\ 0 & 9/10 & -2 & 11/10 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -10/3 \\ -5/2 \\ -5/2 \\ -6/5 \end{bmatrix}
$$

$\boldsymbol{\alpha = 9/10\, , \beta = 2\ \ \rho\ = 11/10\ \ \tau\ =\ -6/5}$

Pregunta 5

```
T=[595 623 761 849 989 1076 1146  1202 1382 1445 1562];

k=10^(20)*[2.12 3.12 14.4 30.6 80.3 131 186 240  489  604  868];

y=log(k);

plot(T,y,'rs')

A=[T'.^0 log(T')  -1./T'];

M=A'*A;

b=A'*y';

c=vpa(M\b,6)

yaprox=c(1)+c(2)*log(T)-c(3)./T;

R2=var(yaprox)/var(y)  %puede variar usando operaciones con vectores.

Ti=linspace(T(1),T(end));

yi=c(1)+c(2)*log(Ti)-c(3)./Ti;

plot(T,y,'rs',Ti,yi,'b.-')
```

Pregunta 6

Cumple con las condiciones de continuidad y suavidad
S0(2)=S1(2)

S0’(2)=S1’(2)

S0”(2)=S1”(2)

Respuesta: Verdadero

Pregunta 7

Usando las fórmulas de diferenciación numérica de dos puntos, hacia adelante y hacia atrás.

Respuesta: $f(0.6) = 2.12,\ f'(0.5) = 2.2$

Pregunta 8

El código corresponde al método de Simpson 1/3 compuesto el cual es exacto para polinomios de grado 3 o menor. Por lo que se obtiene también por integración directa de $-x^3+1$ entre -8 y 8.

Respuesta: I=16

Parte 2

Problema 1

(1) (a)

x	$f(x)$
0	0.0300
0.5000	0.4587
1.0000	0.2100
1.5000	0.3188
2.0000	−0.0100

Ecuaciones Normales

$$\begin{bmatrix} 7.5000 & 5.0000 \\ 5.0000 & 5.0000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8975 \\ 1.0075 \end{bmatrix}$$

$$g(x) = a_1 x + a_0 = -0.044x + 0.2455$$

(b) El Polinomio interpolante lineal $p_1(x) = -0.6575x + 1.3050$.

Aproximación de $f(1.5) \approx p_1(1.5) = 0.3188$. Error $\to 0$

(c) $V_{\text{aprox}}(x) = \pi \int_0^2 [g(x)]^2 dx$

$V(x) = \pi \int_0^2 [-0.044x + 0.2455]^2 dx = 0.2592.$ kilometros cúbicos

$\delta = \frac{|0.49-0.2592}{0.49} 100\% = 47.1\%$

Problema 2

$$S = \int_0^6 2\pi x \sqrt{\frac{x^6}{100} + 1}\, dx$$

$h = \frac{6-0}{4} = \frac{3}{2}$

a)

$$Is1_3 = \frac{h}{3}\left(f(0) + 4f\left(\frac{3}{2}\right) + 2f(3) + 4f\left(\frac{9}{2}\right) + f(6)\right) = 1000.1$$

b) $h = \frac{6-0}{6} = 1$

$$Is13_8 = \frac{3h}{8}\big(f(0) + 3f(1) + 3f(2) + 2f(3) + +3f(4) + 3f(5) + f(6)\big) = 997.95$$

c) a=0 ; b=3;

$x = \frac{3}{2}(z+1)\,,\ \ dx = \frac{3}{2}dz$

$$S = \int_{-1}^{1} \underbrace{\frac{9}{2}\pi(z+1)\sqrt{\frac{\left(\frac{3}{2}(z+1)\right)^6}{100} + 1}}_{F(z)}\, dz$$

$$qg_{l1} = F\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + F\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 42.9854$$

a=3 ; b=6;

$x = \frac{3}{2}z + \frac{9}{2},\ \ dx = \frac{3}{2}dz$

$$S = \int_{-1}^{1} \underbrace{\frac{9}{2}\pi(z+1)\sqrt{\frac{\left(\frac{3}{2}z+\frac{9}{2}\right)^6}{100} + 1}}_{F(z)}\, dz$$

$$qg_{l2} = F\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + F\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 950.9418$$

$$qgL = qg_{l1} + qg_{l2} = 993.9$$

d) El método que más se aproxima es Simpson 3/8, la razón es porque es una cuadratura basada en un polinomio cúbico cerrado, mientras que Simpson 1/3 es basado en una cuadrática y Gauss Legendre es igual a una cúbica abierta (no toma en cuenta los extremos).

Problema 3

a)

$x'' = g \; sen \; \beta - \mu \; g \cos \beta - (k \; g \,/\, W) \; x$

$x' = v$

$v' = g \; sen \; \beta - \mu \; g \cos \beta - (k \; g \,/\, W) \; x$

b)

$x''=v'$

$v''=(-k \; g \,/\, W \,) \; v$

$t_{i+1}=t_i+h$

$x_{i+1}=x_i+h*v_i+h\hat{}2/2*v'_i$

$v_{i+1}=v_i+h*v'_i+h\hat{}2/2*v''_i$

c)

t	x	v
0	0	0
0.5000	0.5069	2.0277
1.0000	1.9643	3.5484
1.5000	3.9999	4.1501
2.0000	6.0818	3.6587
2.5000	7.6577	2.1875
3.0000	8.3010	0.1122
3.5000	7.8262	-2.0254

El desplazamiento máximo ocurre cuando v=0, aproximadamente en t=3.0 seg y un desplazamiento máximo de 8.3 m

d)

De la tabla anterior t=1.5 seg y v=4.1501 m/s